

Prof. Dr. Alfred Toth

Funktoren und Morphismen von Funktoren in triangulierten semiotischen Kategorien

1. Zu triangulierten Kategorien in der Semiotik vgl. bereits Toth (2010a, b). Ich gebe hier quasi als Nachtrag die exakten Definitionen aus Kaschiwara/Schapira (2006, S. 242) wieder:

10.1 Triangulated Categories

Definition 10.1.1. (i) A category with translation (\mathcal{D}, T) is a category \mathcal{D} endowed with an equivalence of categories $T: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. The functor T is called the translation functor.

(ii) A functor of categories with translation $F: (\mathcal{D}, T) \rightarrow (\mathcal{D}', T')$ is a functor $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ together with an isomorphism $F \circ T \simeq T' \circ F$. If \mathcal{D} and \mathcal{D}' are additive categories and F is additive, we say that F is a functor of additive categories with translation.

(iii) Let $F, F': (\mathcal{D}, T) \rightarrow (\mathcal{D}', T')$ be two functors of categories with translation. A morphism $\theta: F \rightarrow F'$ of functors of categories with translation is a morphism of functors such that the diagram below commutes:

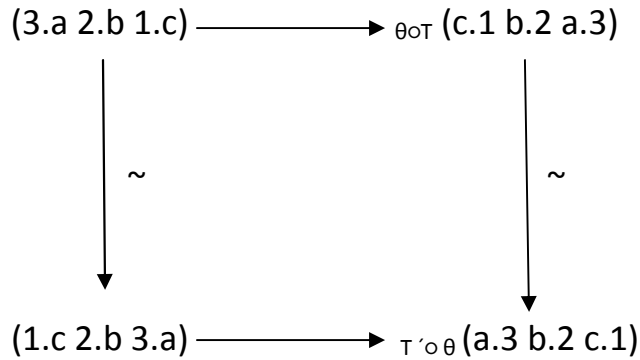
$$\begin{array}{ccc} F \circ T & \xrightarrow{\theta \circ T} & F' \circ T \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ T' \circ F & \xrightarrow{T' \circ \theta} & T' \circ F' \end{array}$$

2. Wie man leicht zeigen kann, entsprechen die vier Ecken des obigen kommutativen Diagramms genau den vier Kombinationen, die man aus einer Zeichenklasse gewinnt, wenn man die Dyaden invertiert und die Triade dualisiert

1. (3.a 2.b 1.c) 3. (c.1 b.2 a.3)

2. (1.c 2.b 3.a) 4. (a.3 b.2 c.1).

Man kann also das Diagramm wie folgt notieren:



3. In einem nächsten Schritt kann man nun die vier Funktoren selbst durch Morphismen aufeinander abbilden:

- (iv) A subcategory with translation (\mathcal{D}', T') of (\mathcal{D}, T) is a category with translation such that \mathcal{D}' is a subcategory of \mathcal{D} and the translation functor T' is the restriction of T .
- (v) Let (\mathcal{D}, T) , (\mathcal{D}', T') and (\mathcal{D}'', T'') be additive categories with translation. A bifunctor of additive categories with translation $F: \mathcal{D} \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}''$ is an additive bifunctor endowed with functorial isomorphisms

$$\theta_{X,Y}: F(TX, Y) \xrightarrow{\sim} T''F(X, Y) \text{ and } \theta'_{X,Y}: F(X, T'Y) \xrightarrow{\sim} T''F(X, Y)$$

for $(X, Y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ such that the diagram below anti-commutes (see Definition 8.2.20):

$$\begin{array}{ccc}
 F(TX, T'Y) & \xrightarrow{\theta_{X,T'Y}} & T''F(X, T'Y) \\
 \theta'_{TX,Y} \downarrow & \text{ac} & \downarrow T''\theta'_{X,Y} \\
 T''F(TX, Y) & \xrightarrow{T''\theta_{X,Y}} & T''^2F(X, Y) .
 \end{array}$$

Für die Semiotik gilt hierbei also im einzelnen (wobei I für die Inversion der Triade und i für die Inversion der Dyaden stehe):

$$(3.a \ 2.b \ 1.c) \rightarrow_i (1.c \ 2.b \ 3.a)$$

$$(3.a \ 2.b \ 1.c) \rightarrow_{ii} (c.1 \ b.2 \ a.3) (= \times(3.a \ 2.b \ 1.c) = (c.1 \ b.2 \ a.3))$$

$$(3.a \ 2.b \ 1.c) \rightarrow_i (a.3 \ b.2 \ c.1)$$

$$(1.c \ 2.b \ 3.a) \rightarrow_i (c.1 \ b.2 \ a.3)$$

$$(1.c \ 2.b \ 3.a) \rightarrow_{ii} (a.3 \ b.2 \ c.1),$$

$(c.1 \ b.2 \ a.3) \rightarrow_i \ (a.3 \ b.2 \ c.1)$

d.h. obwohl wir es mit 6 Abbildungen zu tun haben, genügen die Morphismen i, I und ihre Kompositionen il und li , damit das obige Diagramm erfüllt ist! (In Sonderheit hat führt man so die in der Semiotik durch nichts motivierte „Dualisation“ auf die zwei einfachen Basisabbildungen i und I zurück.)

Bibliographie

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. Springer 2006

Toth, Alfred, Triangulierte Kategorien in der Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2010a)

Toth, Alfred, Inversion, Dualisation und Triangulation. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2010b)

10.12.2010